76. 距離空間ニ於ケル曲線ノ長サ，强半連續曲線函數ニ就テ

南雲道夫（阪大）

Hilbert ヤ Tonelli 等ニヨッテ変分學ニモタラサレタ直接法ノ考ヘ方ヲバ，距離空間ニ於テ應用シテ見度ク思ヒマス。即チ半連續曲線函數等ト云フ考ヘヲ，距離空間ニ結ビ付ケテ見ルノデス。（之等ノ概念ハ下ニ説明シマス）．未ダ少シシカ出來テヰマセン。ソノ上平素甚ダ文献ニ暗イノデ，或ハ已ニ充分ヨク研究サレテヰルコトヲ知ラズニ居ルノカモ知レマセン。識者ノ御教示ヲ乞フテ止ミマセン。

§1. 距離空間ニ於ケル曲線ノ長サ（最短曲線ノ存在）

1) 距離空間トハ，之ニ屬スル任意ノ二点 P, Q ニ對シ距離 $\rho(P, Q)$，即チ次ノ三ツノ性質ヲ有スル實數 ρ ガ與ヘラレテアル集合ノ事デアル。

(1) $\rho(P,Q) \geqq 0$， 丁度 $P=Q$ ノ時ニ限リ $\rho(P,Q)=0$.

(2) $\rho(P,Q)=\rho(Q,P)$〔對稱性〕.

(3) $\rho(P,Q)+\rho(Q,R) \geqq \rho(P,R)$〔三角不等式〕.

以上ノ性質ヲ有シ且ツ Vollständig（Cauchy ノ收斂條件ヲミタス点列ガ $\mathfrak{R}$ ニ屬スル極限点ヲ持ツコト）ナ空間ヲ $\mathfrak{R}$ デ表ハスコトニスル。$\mathfrak{R}$ ハ尚ホ Zusammenhängend 即チ $\mathfrak{R}$ ニ屬スル任意ノ二点ハ連續曲線（$\mathfrak{R}$ 内ノ）

デ結ベルモノトスル。

2) $\mathcal{R}$ニ於ケル曲線$\mathfrak{C}$ノ長サトハ; $\mathfrak{C}$ガ連続函数$\mathrm{P}(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ $(\mathrm{P}\in\mathcal{R})$デ表ハサレルモノトスル時(普通ノ曲線ノ長サト同様ニ)

$$\mathrm{L}[\mathfrak{C}]=\sum_{\nu=1}^{n}\rho(\mathrm{P}_{\nu-1},\mathrm{P}_{\nu})\text{ ノ上限}$$

ニヨッテ定義スル。但シ $\mathrm{P}_\nu=\mathrm{P}(t_\nu)$; $t_0=0,\ t_{\nu-1}<t_\nu,\ t_n=1.$

之カラ Jordan (?) ノ長サト殆ドスベテガ同様ナルコトガワカル。尚ホ以上ノ定義デケカラ容易ニ $\mathrm{L}[\mathfrak{C}]$ ノ半連続性(ノミナラズ強半連続性)、従ッテ最短曲線ノ存在ガ証明出来マス。

3) $\underline{\mathrm{L}[\mathfrak{C}]\text{ノ下半連続性}}$トハ,

$$\mathfrak{C}'\Rightarrow\mathfrak{C}\text{ ノ時,}\quad \underline{\lim}\,\mathrm{L}[\mathfrak{C}']\geqq\mathrm{L}[\mathfrak{C}].$$

ナルコトヲ云フ。

(厳密ナ定義ハ茲ニ略ス)

尚ホ $\underline{\mathrm{L}[\mathfrak{C}]\text{ハ強ク下半連続}}$デアル。ソノ意味ハ$\mathfrak{C}$ガ$\mathfrak{C}'$ノ$\delta(\varepsilon)$近傍ニ含マレル時※(但シ$\mathfrak{C}'$ハ一定)

$$\mathrm{L}[\mathfrak{C}']\geqq\mathrm{L}[\mathfrak{C}]-\varepsilon$$

トナル事デアル。

(※正確ニ言ヘバ$\mathfrak{C}$上ニ全ク任意ノ有限個ノ点 $\mathrm{P}_1,\cdots\cdots,\mathrm{P}_n$ ヲぱらめたーもノ順序ニ取レバ、之ニ對シ$\mathfrak{C}'$上ニモぱらめたーもノ順序ニ $\mathrm{P}'_1,\cdots\cdots,\mathrm{P}'_n$ ナル点ガ $\rho(\mathrm{P}_\nu,\mathrm{P}'_\nu)<\delta(\varepsilon)$ ナル様ニ存在スルコト)

（証明）

先ヅ $L[\mathcal{C}]$ ノ定義カラ

$$\sum_{\nu=1}^{n} \rho(P_{\nu-1}, P_\nu) > L[\mathcal{C}] - \frac{\varepsilon}{2}$$

ナル $\mathcal{C}$ 上ノ点 $P_0, P_1, \cdots\cdots, P_n$ ガ存在スル。　之レニ對シ

$\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4n}$ トスレバ

$$\rho(P_\nu, P'_\nu) < \frac{\varepsilon}{4n}$$

ナル $P'_0, P'_1, \cdots\cdots, P'_n$ ガ $\mathcal{C}'$ 上ニ存在スル。從ッテ

$$\sum_{\nu=1}^{n} \rho(P'_{\nu-1}, P'_\nu) > \sum_{\nu=1}^{n} \rho(P_{\nu-1}, P_\nu) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

所ガ

$$L[\mathcal{C}'] \geqq \sum \rho(P'_{\nu-1}, P'_\nu).$$

故ニ

$$L[\mathcal{C}'] \geqq L[\mathcal{C}] - \varepsilon \qquad \text{（証明了）}$$

4) Kompakt ナ $\mathcal{R}$

次ニ最短曲線ノ存在定理ヲ論ズルタメ $\mathcal{R}$ ハ尚ホ Kompakt デアルト假定スル。$\mathcal{R}$ ガ Kompakt トハ $\mathcal{R}$ ノ任意ノ無限部分集合ハ少クトモ一ツ $\mathcal{R}$ ニ屬スル集積点ヲ持ツコトヲ云フ。例ヘバ n 次元ノ有界ナ閉集合ハ Kompakt ナ空間ヲ作ル。(Weierstrass-Bolzano ノ定理ニヨル)

Lemma. $\mathcal{R}$ ガ Kompakt ナラバ，$L[\mathcal{C}] \leqq M$（M ハ一定ノ正ノ数）ナル様ナ $\mathcal{C}$ ノ集合 $\{\mathcal{C}\}$ モ亦 Kompakt※ デアル。

(※ $\{\mathcal{C}\}$ ノ任意ノ無限部分集合 $\{\mathcal{C}\}'$ ハ $\mathcal{C}_n \Rightarrow \mathcal{C}_0 \in \mathcal{C}$ ナル様ナ曲線列 $\{\mathcal{C}_n\}$ ヲ含ム)

(証 明)

$$S = \frac{L[\mathcal{C}_{P_0,\, P(t)}]}{L[\mathcal{C}]}$$

ヲバ t ノ代リニ曲線 $\mathcal{C}$ ノぱらめたーニ選べバ $(0 \leqq S \leqq 1)$,

$\rho(P(s_1), P(s_2)) \leq M|s_1 - s_2|$ ナルコトがワカル。 従ッテ *Ascoli-Argela* ノ定理(一様有界且ツ *gleichartig stetig* ナ函數集合カラ一様收斂ナル函數列が選ビ出セルコト)ニヨリ

$$\mathcal{C}_n \Rightarrow \mathcal{C}_0 \text{ ナル } \{\mathcal{C}_n\} \subset \{\mathcal{C}\}'.$$

$\mathcal{C}_0 \in \{\mathcal{C}\}$ ハ $L[\mathcal{C}]$ が下ニ半連續ナルコトがワカル。

5) 最短曲線ノ存在

$L[\mathcal{C}]$ ノ半連續性ト上ノ *Lemma* ニヨリ $\mathcal{R}$ が *Kompakt* ナラバ最短曲線ノ存在スルコトが容易ニ証明出來ル。

之ニヨリ球面ヤ、ドーナツ面等ノナメラカナ閉曲面ニ於テハソノ任意ノ二点ヲ通リ最短曲線が存在スルコトハ明ラカデアル。(此ノ初等的ナ場合ノ二点間ノ距離トハ、ソノ二点ヲ結ブ線分ノ長サノコトデアル) 所が $\mathcal{R}$ ハ *Zusammenhängend, Vollständig Kompakt* ダケヲ假定シテヰルノデアルカラ、最短曲線ノ存在ハ可ナリ一般的ナ曲面(但シ有限ナ長サノ曲線が存在スル様ナ)ニツイテ成立スルモノデアル。

6) 測地的空間

$\mathcal{R}$ ガ測地的トハ、$\mathcal{R}$ ノ任意ノ二点 P,Q ニ對シテ、丁度

$$L[\mathcal{C}_{P,Q}]=\rho(P,Q)$$

ナル様ナ P,Q ヲ結ブ曲線 $\mathcal{C}_{P,Q}$（勿論最短曲線）ガ存在スル事ヲ云フ。

一般ニ $\mathcal{R}$ ニ属スル任意ノ二点ヲ結ブ最短曲線ガ存在スル時、ソノ最短曲線ノ長サヲ、ソノ二点間ノ距離トシタ空間ガ測地的空間デアル。

$\mathcal{R}$ ガ測地的ナルタメノ必充條件ハ；$\mathcal{R}$ ノ任意ノ二点 P,Q ニ對シ

$$\rho(P,R)=\rho(R,Q)=\frac{1}{2}(P,Q)$$

ナル点 R（P,Q ノ中点）ガ $\mathcal{R}$ ニ存在スルコトデアル。（証明ハ容易・3), 4) ヲ用ヒズニ出來ル）

§2. 强半連續曲線函數ト半距離

§1 ニ於ケル曲線ノ長サ $L[\mathcal{C}]$ ガ强下半連續曲線函數ナルコトハ已ニ証明シタ。次ニ一般ニ强下半連續ナ曲線函數 $F[\mathcal{C}]$ ヲ研究シヨウ。

即チ一般ニ强下半連續ナ曲線函數ハ、距離ヲ更ニ一般化シタ半距離ニヨッテ定義サレルコトハ、曲線ノ長サガ距離ヲ本トシテ定義サレルノト同様デアルコトヲ示ス。次ニ此ノ考ヘヲ應用シテ、最小値曲線ノ存在ヲ論ジタイガ、未ダ一般的ニハ出來マセン。（半距離ガ正ナル場合ダケシカ）

1) 曲線函數$\mathsf{F}[\mathcal{C}]$

先ヅ$\mathcal{R}$内ノ曲線$\mathcal{C}$ノ集合$\{\mathcal{C}\}$ガ次ノ性質ヲ有スルモノトスル。

(i) $\mathcal{R}$ノ任意ノ二点P, Qヲ両端トスル曲線$\mathcal{C}_{P,Q}$ガ$\{\mathcal{C}\}$ニ存在スル。

(ii) $\mathcal{C}_{P,Q} \in \{\mathcal{C}\}$ 且ツ $\mathcal{C}_{Q,R} \in \{\mathcal{C}\}$ナラバ

$$\mathcal{C}_{P,R} = \mathcal{C}_{P,Q} + \mathcal{C}_{Q,R} \in \{\mathcal{C}\}$$

(iii) $\mathcal{C}_{P,Q} \in \{\mathcal{C}\}$, Rガ$\mathcal{C}$上ノ点ナラバ

$$\mathcal{C}_{P,R} \in \{\mathcal{C}\}, \quad \mathcal{C}_{R,Q} \in \{\mathcal{C}\},$$

但シ $\mathcal{C}_{P,R} + \mathcal{C}_{R,Q} = \mathcal{C}_{P,Q}$、

次ニ$\{\mathcal{C}\}$デ定義サレタ$\mathsf{F}[\mathcal{C}]$ガ下ノ條件ヲ満タサネバナラナイ。

(i) $\mathsf{F}[\mathcal{C}]$＝實數（有限）.

(ii) $\mathsf{F}[P] = 0$ $\quad$ $\mathcal{C}$ガ只一点ヨリ成ル時.

(iii) $\mathsf{F}[\mathcal{C}_{P,Q} + \mathcal{C}_{Q,R}] = \mathsf{F}[\mathcal{C}_{P,Q}] + \mathsf{F}[\mathcal{C}_{Q,R}]$.

2) $\mathsf{F}[\mathcal{C}]$ノ强下半連続性

$\{\mathcal{C}\}$ハ(i), (ii), (iii)ノ他ナホ次ノ性質ヲ有スルモノトスル。

(iv) δヲ任意ノ正ノ數トスル時$\mathcal{C}_0$ニ對シ, $\mathcal{C}_0$ヲバδ近傍内ニ含ム※様ナ$\mathcal{C}'$ガ常ニ$\{\mathcal{C}\}$ニ存在スレバ, $\mathcal{C}_0$ハ$\{\mathcal{C}\}$ニ属スル。

(※ 3) ノ説明参照)

サテ以上ノ様ナ$\{\mathcal{C}\}$デ定義サレタ$\mathsf{F}[\mathcal{C}]$ガ下ニ强半連続デ

アルトスル。即チ上ノ(iV)ニ述ベタ様ナ $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}'$ ニツイテ常ニ

$$\mathrm{F}[\mathcal{C}'] \geqq \mathrm{F}[\mathcal{C}_0]-\varepsilon.$$

但シ ε ハ任意ノ正ノ数、δ ハ ニ従ッテ決定サレル正ノ数デアル。一般ニ $P, Q \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{P,Q} \subset \mathcal{C}$ ナラバ $\mathrm{F}[\mathcal{C}_{P,Q}]$ ハ P, Q ニツキ連続デアル。

3) $g(P, Q)$ ノ定義

$$g(P,Q)=\mathrm{F}[\mathcal{C}_{P,Q}] \text{ ノ下限}$$

ニヨッテ $g(P,Q)$ ヲ定義スル。(上ノ下限トハ P, Q ヲ結ブ $\{\mathcal{C}\}$ ノアラユル曲線ニツイテノ下限デアル) シカラバ $g(P,Q)$ ハ次ノ性質ヲ有ス。

(1) $g(P, Q)$ ＝有限ナ實數.

(2) $g(P, P)=0$.

(3) $g(P, Q)+g(Q, R) \geqq g(P, R)$

(4) $g(P, Q)$ ハ P, Q ニツキ下ニ半連続デアル。

然シ $g(P, Q)=g(Q, P)$ ハ一般ニハ成立シナイ。

(3) ハ $\mathrm{F}[\mathcal{C}]$ ガ下ニ半連続ナルコトヲ假定セズトモ成立スル(ソノ値ガ有限デサヘアレバ) 又 (1) ト (2) トハ同等デアル。

$\mathrm{F}[\mathcal{C}]$ ガ下ニ強半連続ナコトカラ (2) ガ成立、随ッテ (1) モ成立スル。

4) $g(P, Q)$ ト $\mathrm{F}[\mathcal{C}]$ トノ関係

今 $\mathcal{C}$ ガ $P(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ デ表ハサレルモノトシ

$$\Gamma[\mathcal{C}]=\sum_{\nu=1}^{n} g(P_{\nu-1}, P_\nu) \text{ ノ上限} \quad \begin{pmatrix} P_\nu=P(t_\nu), t_{\nu-1}<t_\nu, \\ t_0=0,\ t_n=1 \end{pmatrix}$$

ニヨッテ $\Gamma[\mathcal{C}]$ ヲ定義スレバ

$$\Gamma[\mathcal{C}]=F[\mathcal{C}].$$

（証明）

先ヅ $g(P,Q)$ ノ定義カラ

$$F[\mathcal{C}]=\sum_{\nu=1}^{n}F[\mathcal{C}_{P_{\nu-1},P_\nu}]\geqq\sum_{\nu=1}^{n}g(P_{\nu-1},P_\nu)$$

故ニ $\Gamma[\mathcal{C}]$ ノ定義ニヨリ

$$F[\mathcal{C}]\geqq\Gamma[\mathcal{C}].$$

次ニ $\Gamma[\mathcal{C}]$ ノ定義カラ、任意ノ正ノ数 ε ニ對シテ

$$\Gamma[\mathcal{C}]-\frac{\varepsilon}{3}>\sum_{\nu=1}^{n}g(P_{\nu-1},P_\nu)$$

ナル $P_1,\cdots\cdots,P_{n-1}$ ガ $\mathcal{C}$ 上ニ存在スル。此ノ際 P_ν ハ (3) ニヨリ $\mathcal{C}$ 上ニ如何ホドデモ細カク取ルコトガ出來ル。ソコデ $g(P,Q)$ ノ定義ニヨリ

$$g(P_{\nu-1},P_\nu)-\frac{\varepsilon}{3n}>F[\mathcal{C}'_{P_{\nu-1},P}]$$

ナル $\mathcal{C}'$ ガ存在スル。$(\mathcal{C}'=\mathcal{C}'_{P_0,P_1}+\cdots\cdots+\mathcal{C}'_{P_{n-1},P_n})$ 從ッテ

$$\Gamma[\mathcal{C}]-\frac{2}{3}\varepsilon>F[\mathcal{C}'].$$

所ガ $F[\mathcal{C}]$ ガ下ニ强半連續デアルカラ，P_ν ヲ $\mathcal{C}$ 上ニ充分細カクトレバ

$$F[\mathcal{C}']>F[\mathcal{C}]-\frac{1}{3}\varepsilon.$$

故ニ $\qquad \Gamma[\mathcal{C}]>F[\mathcal{C}]-\varepsilon$

從ッテ ($\varepsilon\to 0$ ノ時) $\Gamma[\mathcal{C}]\geqq F[\mathcal{C}]$.

カクテ結局 $\Gamma[\mathcal{C}]=F[\mathcal{C}]$ （証明了）

5) 半距離 $\gamma(P,Q)$

一般ニ$\mathcal{R}$ニ於テ 3) ノ $g(P,Q)$ ト同様ナ性質ヲ有スル量 $\gamma(P,Q)$ ヲ P,Q 間ノ半距離ト名ヅケル。即チ $\gamma(P,Q)$ ハ$\mathcal{R}$ノ任意ノ二点 P,Q ニツイテ定義サレタ，次ノ性質ヲ有スル量デアル。

(1) $\gamma(P,Q)=$有限ナ實數

(2) $\gamma(P,P)=0$

(3) $\gamma(P,Q)+\gamma(Q,R)\geqq\gamma(P,R)$

(4) $\gamma(P,Q)$ ハ P,Q ニツキ 下ニ半連續デアル。

扨テ半距離 $\gamma(P,Q)$ ヲ本ニシテ、曲線ノ長サト同ジ様ニシテ、任意ノ$\mathcal{C}$ニツキ

$$\underline{F[\mathcal{C}]=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma(P_{\nu-1},P_{\nu})\text{ ノ上限}}$$

ニヨッテ $F[\mathcal{C}]$ ヲ定義スル。

$F[\mathcal{C}]$ ハ先ヅ次ノ性質ヲ有スル。

$$F[P]=0$$
$$F[\mathcal{C}_{P,Q}+\mathcal{C}_{Q,R}]=F[\mathcal{C}_{P,Q}]+F[\mathcal{C}_{Q,R}]$$

尚ホ <u>$F[\mathcal{C}]$ ハ下ニ强半連續デアル</u>。

(証明ハ $L[\mathcal{C}]$ ガ下ニ强半連續ナコトノ場合ト全ク平行ニ出來ル)

6) 最小値曲線ノ存在

次ニ$\mathcal{R}$内デ常ニ $g(P,Q)>0$ ナル場合ニ、二定点A,Bヲ結ビ $F[\mathcal{C}]$ ヲ最小ナラシムル$\mathcal{C}$ガ存在スルコトヲ証明ショウ

（証 明）　$F[\mathcal{C}_{A,B}]=g(A,B)$

ナル $\mathcal{C}_{A,B}$ ノ存在ヲ証明スレバヨイ。所が

$$F[\mathcal{C}]=\Gamma[\mathcal{C}].$$

故ニ

$$\Gamma[\mathcal{C}_{A,B}]=g(A,B)$$

ナル $\mathcal{C}_{A,B}$ ノ存在ヲ証明スレバヨイ。

ソレニハ常ニ

$$g(P,R)=g(R,Q)=\frac{1}{2}g(P,Q)$$

ナル点Rが存在スルコトヲ証明シ，

常ニ $g(P,Q)>0$ ナル場合ニハ $\lim g(P,Q)=0$ ナラバ $\rho(P,Q)=0$ ナルコトヲ証明スレバヨイ。

——（1月6日）——